

Welcome To: 数字信号处理
Digital Signal Processing

第 12 讲

LTI系统的变换域分析 (Part II)

LTI Systems in the Frequency Domain

主讲: 金连文
eelwj@scut.edu.cn

华南理工大学 电子与信息学院

Outline

- 线性相位FIR系统
- 几种简单的数字滤波器
 - FIR
 - 低通, 高通
 - IIR
 - 低通, 高通, 带通, 带阻
 - 梳状滤波器
- 互补传输函数及逆系统

华南理工大学 电子与信息学院

四、线性相位FIR系统分类

华南理工大学 电子与信息学院

线性相位FIR系统 (1)

- 设计一个线性相位的LTI系统是有意义的。
- 本节的动机:
 - 在很多场合下, 我们希望系统具有线性相位, 如何进行设计?
- IIR的线性相位特性很难直接设计
- FIR的线性相位特性可以很好的进行设计
 - 我们考虑实因果冲击响应序列的线性相位设计问题

华南理工大学 电子与信息学院

线性相位FIR系统 (2)

- 实因果冲击响应FIR系统, 其传输函数为:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n]z^{-n}$$
- 未来获得线性相位特性, 其频率响应应该具有如下形式:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(c\omega + \beta)} \tilde{H}(\omega)$$

\downarrow
相位特性

\downarrow
幅频特性, 零相位响应

华南理工大学 电子与信息学院

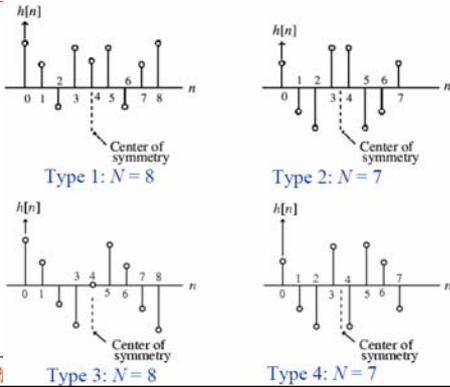
线性相位FIR系统 (3)

- 利用实冲击响应序列的频率响应的偶对称性及幅频响应的奇偶对称性, 经过推导 (书P296), 我们可以得出, 满足线性相位的FIR因果系统的冲击序列必须满足如下关系:

$$h[n] = \pm h[N-n], 0 \leq n \leq N$$
- 冲击响应必须是对称或反对称的。
- 分四种情况讨论:
 - $h[n]$ 对称, N 为偶数 → I型 FIR
 - $h[n]$ 对称, N 为奇数 → II型 FIR
 - $h[n]$ 反对称, N 为偶数 → III型 FIR
 - $h[n]$ 反对称, N 为奇数 → IV型 FIR

华南理工大学 电子与信息学院

线性相位FIR系统 (4)



I型FIR因果系统举例

- $h[n]$ 对称, 不妨设 $N=8$

$$H(z) = h[0](1+z^{-8}) + h[1](z^{-1}+z^{-7}) + h[2](z^{-2}+z^{-6}) + h[3](z^{-3}+z^{-5}) + h[4]z^{-4}$$

$$= z^{-4}\{h[0](z^4+z^{-4}) + h[1](z^3+z^{-3}) + h[2](z^2+z^{-2}) + h[3](z+z^{-1}) + h[4]\}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} \{2h[0]\cos(4\omega) + 2h[1]\cos(3\omega) + 2h[2]\cos(2\omega) + 2h[3]\cos(\omega) + h[4]\}$$

$$\Rightarrow \theta(\omega) = -4\omega + \beta$$

$$\Rightarrow \tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = 4$$

I型FIR系统频率响应函数

- I型FIR系统频率响应函数的一般形式

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \tilde{H}(\omega)$$

$$\tilde{H}(\omega) = h[\frac{N}{2}] + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h[\frac{N}{2} - n] \cos(\omega n)$$

II型FIR系统频率响应函数

- The expression for the frequency response in the general case for Type 2 FIR filters is of the form

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \tilde{H}(\omega)$$

where the amplitude response is given by

$$\tilde{H}(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h[\frac{N+1}{2} - n] \cos(\omega(n - \frac{1}{2}))$$

III型FIR系统频率响应函数

- 频率响应函数:

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jN\omega/2} \tilde{H}(\omega)$$

where the amplitude response is of the form

$$\tilde{H}(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} h[\frac{N}{2} - n] \sin(\omega n)$$

IV型FIR系统频率响应函数

- 频率响应函数:

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jN\omega/2} \tilde{H}(\omega)$$

where now the amplitude response is of the form

$$\tilde{H}(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{(N+1)/2} h[\frac{N+1}{2} - n] \sin(\omega(n - \frac{1}{2}))$$

FIR系统频率响应函数一般形式

- 四种FIR线性相位系统的频率响应函数具有如下一般形式:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} e^{j\beta} \tilde{H}(\omega)$$

- 例子: P299-301

线性相位的FIR系统的零点分布

- 回想线性相位FIR系统的冲击响应序列满足:

$$h[n] = \pm h[N-n], 0 \leq n \leq N$$

- 不难推导, 其传输函数满足下式:

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

- 满足上式的H(z)我们称之为镜像多项式。

- 可见:

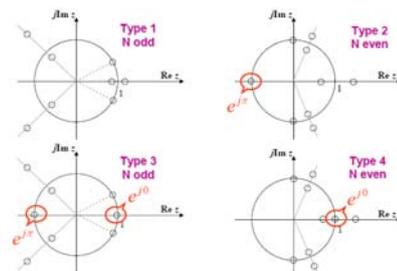
- > H(z)的零点是关于单位圆镜像对称的。
- > H(z)的零点总是成对出现



四种线性相位FIR滤波器的零点分布

- I型 FIR**
 - > 在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处有偶数个零点或者没有零点
- II型 FIR**
 - > 在 $z=1$ 处有偶数个零点或者没有零点, 在 $z=-1$ 处有奇数个零点
- III型 FIR**
 - > 在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处有奇数个零点
- IV型 FIR**
 - > 在 $z=1$ 处有奇数个零点, 在 $z=-1$ 处有偶数个零点或者没有零点

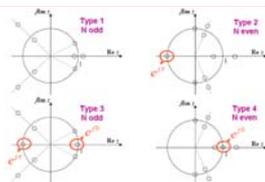
四种线性相位FIR滤波器的零点分布



Q/A: 如何根据零点分布性质来设计滤波器?

根据零点分布性质来设计FIR滤波器

- I型:**
 - > 可以设计任何滤波器
- II型:**
 - > 不适合设计高通
- III型:**
 - > 不适合设计高通、低通、带阻
- IV型:**
 - > 不适合设计低通



思考

- Q/A: 因果FIR滤波器有没有极点? 若有, 可能在什么位置?
 - > 有! 在圆点处。
 - Eg. 2阶滑动平均滤波器。

五、几种典型的数字滤波器

- 几种简单的FIR数字滤波器
- 几种简单的IIR数字滤波器
- 梳状滤波器

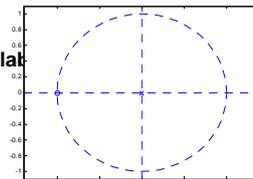
FIR低通滤波器 (1)

- Q/A: FIR低通滤波器零极点图可能是什么样?
- 一个2阶滑动平均滤波器

$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1}) = \frac{z+1}{2z}$$

- 零点: $z=-1$; 极点: $z=0$
- 一个2阶滑动平均滤波器

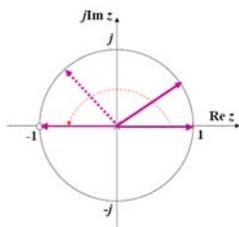
- ? Q/A: 画其零极点图的matlab
- `zplane([1 1],[2])`



FIR低通滤波器 (2)

- 2阶滑动平均滤波器的频率响应

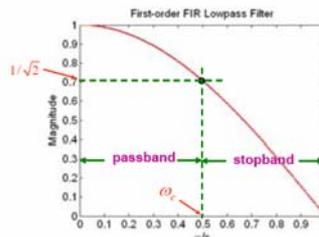
$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1}) = \frac{z+1}{2z}$$



- As ω increases from 0 to π , the magnitude of the zero vector decreases from a value of 2, the diameter of the unit circle, to 0

- We can work out the frequency response $H_0(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2)$

FIR低通滤波器幅频特性 (3)



`zerophas([1 1],[2])`

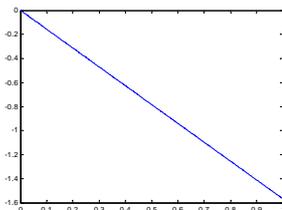
$$20 \log(1/\sqrt{2}) = -3 \text{ dB} \quad 3\text{-dB cutoff frequency}$$

- 3dB截止频率的定义: 增益衰减3dB的频率点

$$\left| H_0(e^{j\omega_c}) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| H_0(e^{j0}) \right| \quad -20 \log_{10} \sqrt{2} \cong -3 \text{ dB}$$

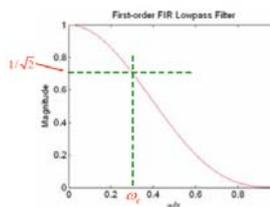
FIR低通滤波器相频特性 (4)

- Q/A: 2阶滑动平均滤波器的相位响应函数?



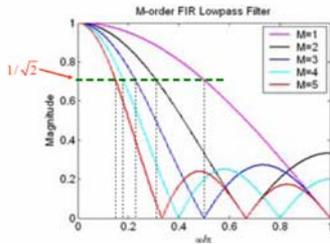
FIR低通滤波器的级联 (5)

- 三个上述2阶滑动平均低通滤波器的级联
- 改善低通选择性能, 3dB截止频率靠后



高阶FIR低通滤波器 (6)

- M阶滑动平均滤波器

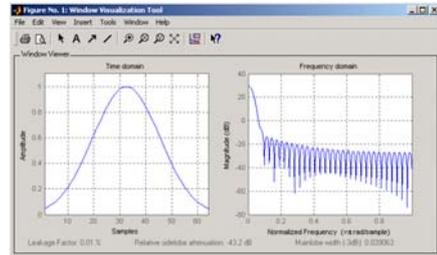


Gaussian低通滤波

$$w(n) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{N/2}\right)^2}$$

where $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$, $\alpha \geq 2$ and the window length is $L = N+1$

w=gausswin(L)
w=gausswin(L, α)
Wvtool(gausswi(L))



FIR高通滤波器 (1)

- 从低通到高通的变换:
 - $z \rightarrow -z$
 - $H(z) \rightarrow 1-H(z)$
- 思考: 如何从零极点图上看上述变换实现了低通到高通的转化?

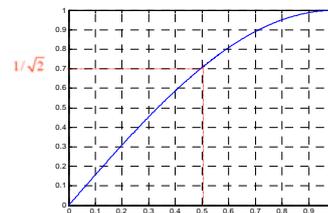
$$H_0(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1}) \Rightarrow H_1(z) = \frac{1}{2}(1-z^{-1})$$

- Q/A: 上述FIR高通滤波器的零极点图大致如何?
zplane([1 -1],[2])

FIR高通滤波器幅频特性 (2)

- 一阶的FIR高通滤波器的频率响应为:

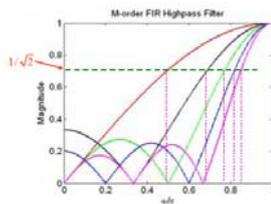
$$H_1(e^{j\omega}) = j e^{-j\omega/2} \sin(\omega/2)$$



FIR高通滤波器 (3)

- 一种典型的M阶高通滤波器:

$$H_1(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M (-1)^n z^{-n}$$



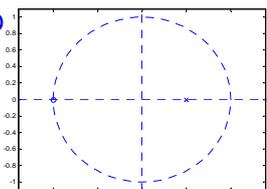
简单的IIR低通滤波器(1)

- $z=-1$ 处要有一个零点
- 一种典型的一阶IIR低通滤波器为:

$$H_{LP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \quad \text{where } |\alpha| < 1 \text{ for stability}$$

- 零极点图: (a=0.5)

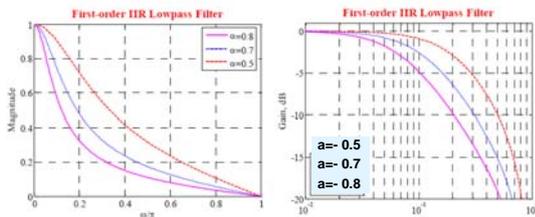
zplane([0.5 0.5],[2 -1])



一阶IIR低通滤波器(2)

- 一阶IIR低通滤波器的幅频特性

$$|H_{LP}(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1-\alpha)^2(1+\cos\omega)}{2(1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega)}$$



一阶IIR低通滤波器(2)

- 3dB截止频率的计算

$$\cos\omega_c = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = (1 - \sin\omega_c) / \cos\omega_c$$

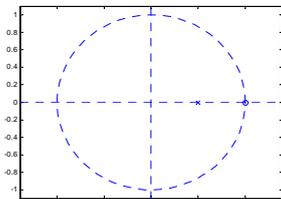
简单的IIR高通滤波器

- 一种典型的简单IIR高通滤波器

$$H_{HP}(z) = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \quad \text{where } |\alpha| < 1 \text{ for stability}$$

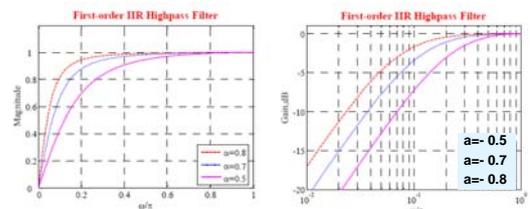
- 零极点图 (a=0.5)

zplane([0.5 0.5],[2 -1])



简单的IIR高通滤波器(2)

- 一阶IIR高通滤波器的幅频特性



- 3dB截止频率的计算: $\alpha = (1 - \sin\omega_c) / \cos\omega_c$

例子: P308 例7.9

简单的IIR带通滤波器(1)

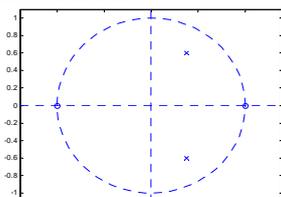
- $z=-1$, 1处要有零点
- 一种典型的二阶IIR带通滤波器为:

$$H_{BP}(z) = \frac{1-\alpha}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}}$$

- 零极点图:

例子: a=0.5, b=0.5

zplane[1 0 -1],[4 -3 2]



简单的IIR带通滤波器(2)

- 二阶IIR带通滤波器的频率响应

$$|H_{BP}(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1-\alpha)^2(1-\cos 2\omega)}{2[1+\beta^2(1+\alpha)^2+\alpha^2-2\beta(1+\alpha)^2\cos\omega+2\alpha\cos 2\omega]}$$

- 二阶IIR带通滤波器的3dB带宽

$$B_w = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \cos^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)$$

- 品质因子:

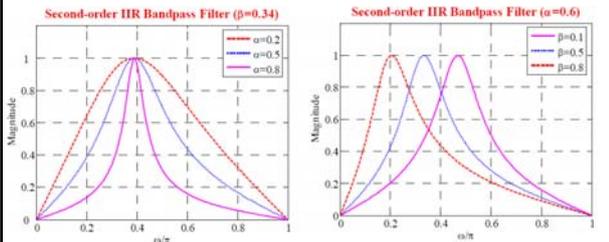
- 带通滤波器中心频率:

$$\omega_o = \cos^{-1}(\beta)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{B_w}$$

简单的IIR带通滤波器(3)

- 不同参数下的幅频特性



例子: P310 例7.10

简单的IIR带阻滤波器

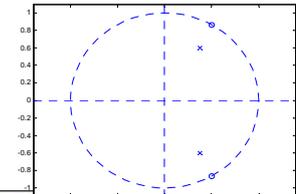
- 在阻频点应该有零点
- 一种典型的二阶IIR带通滤波器为:

$$H_{BS}(z) = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-2\beta z^{-1}+z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha z^{-2}} \quad \begin{matrix} |\alpha| < 1 \\ |\beta| < 1 \end{matrix}$$

- 零极点图:

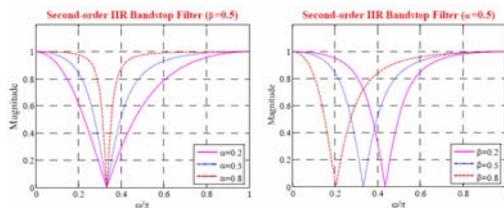
a=0.5, b=0.5

zplane[1 -1 1],[4 -3 2]



简单的IIR带阻滤波器(2)

- 幅频特性:



简单的IIR带阻滤波器(3)

- 陷波频率: 阻带中幅频响应为零的频率点

中心频率: $\omega_0 = \cos^{-1} \beta$

陷波滤波器 (Notch Filter)

- 二阶IIR带阻滤波器的3dB截止频带

$$B_w = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \cos^{-1} \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \right)$$

- 品质因子:

$$Q = \frac{\omega_0}{B_w}$$

高阶IIR滤波器

- 级联多个1阶或低阶的IIR滤波器, 可以得到高阶IIR滤波器, 以获得更好更尖锐的幅频特性
- 例如: 高阶IIR低通滤波器:

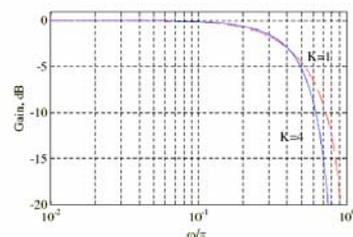
$$G_{LP}(z) = \left(\frac{1-\alpha}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \right)^K$$

- 幅频特性为: $|G_{LP}(e^{j\omega})|^2 = \left[\frac{(1-\alpha)^2(1+\cos\omega)}{2(1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega)} \right]^K$

- 3dB截止频率: $\alpha = \frac{1+(1-C)\cos\omega_c - \sin\omega_c\sqrt{2C-C^2}}{1-C+\cos\omega_c}$

高阶IIR滤波器举例

- 课本P312 例7.12

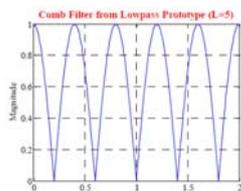


梳状滤波器

- 具有多重通带级多重阻带
- 一般可由单个通带/阻带的滤波器生成
- 形式: $G(z)=H(z^L)$
- 例如:
 - 由1阶FIR低通滤波器生成L阶梳状滤波器:

$$H_0(z) = (1/2)(1+z^{-1})$$

$$\Rightarrow G_0(z) = (1/2)(1+z^{-L})$$



六、互补传输函数及逆系统

互补传输函数 (1)

- 若L个传输函数的和等于单位延时的整数积, 则称它们为相互的**延时互补传输函数**

$$\sum_{i=0}^{L-1} H_i(z) = \beta z^{-n_0}, \quad \beta \neq 0$$

其实是全通滤波器

- 考虑L=2的情况 (两个系统) 的互补性:
 - 若H0为低通, 则H1为高通
 - 若H0为带通, 则H1为带阻

延时互补传输函数 (2)

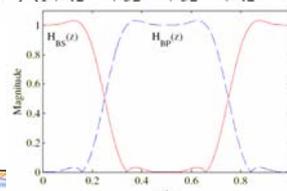
- 例子:

$$H_{BS}(z) = \frac{1}{64}(1+z^{-2})^4(1-4z^{-2}+5z^{-4}+5z^{-8}-4z^{-10}+z^{-12})$$

- 其一种互补传输函数为:

$$H_{BP}(z) = z^{-10} - H_{BS}(z)$$

$$= \frac{1}{64}(1-z^{-2})^4(1+4z^{-2}+5z^{-4}+5z^{-8}+4z^{-10}+z^{-12})$$



全通互补传输函数 (3)

- 若L个传输函数的和等于一个全通函数, 则称它们互为的**全通互补**。

$$\sum_{i=0}^{M-1} H_i(z) = A(z)$$

- 简单情况下, $A(z)=1$ 。
- 从滤波角度看, 两个全通互补的滤波器具有高通/低通或带通/带阻的对称性。

逆系统 (1)

- 逆系统: 两个LTI系统的传输函数h1及h2若满足如下关系, 则称这两个系统是互逆的

$$h_1[n] \otimes h_2[n] = \delta[n]$$

- z变换域上看:

$$H_1(z)H_2(z) = 1$$

- 所以, 若已知H1, 则逆系统为: (要注意考察系统的收敛域)

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$$

- H1的零点→H2的极点; H1的极点→H2的零点

逆系统 (2)

▪ 举例: Textbook 7.19

$$H_1(z) = \frac{(z-1/4)(z+1/5)}{(z+1/2)(z-1/3)}, \quad |z| > 1/2$$

$$\text{逆系统: } H_2(z) = \frac{(z+1/2)(z-1/3)}{(z-1/4)(z+1/5)}$$

$$\text{三个可能的收敛域: } \begin{cases} |z| > 1/4 & (\text{因果、稳定}) \\ 1/5 < |z| < 1/4 & (\text{不稳定}) \\ |z| < 1/5 & (\text{反因果、不稳定}) \end{cases}$$

逆系统 (3)

- 为了获得一个逆系统, 需要预先知道收敛域
 - 对因果系统, 通常是寻找与其对应的因果逆系统
- 互为逆系统的零极点之间的对应关系
- 具有最小相位传输函数的因果系统的因果逆系统总是稳定的
 - Why? A: 原系统的零点在单位园内, 因果性保证收敛域包括单位园
- 非最小相位系统的因果逆系统是不稳定的
 - Why? A: 原系统的零点在单位外内, 因果性表明其收敛域不包括单位园

逆系统 (4)

▪ 逆系统的应用

- 通信中信道均衡
 - 例子详见课本P321 例7.20
- 信号恢复

Thanks!

End of today's lecture

作业

- 作业 (11月18日交)
 - 7.1 / 7.8 / 7.11 / 7.16 / 7.26 / 7.39 / 7.44
- 练习:
 - 7.6 / 7.9 / 7.15 / 7.37 / 7.41 / 7.70

