

# 第9章 IIR数字滤波器设计

## 罗劲洪

### 9.1 预备知识

- 确定传输函数G(z)的过程称为**数字滤波器设计**。
- 在大多数应用中，关键的问题是用一个可实现的传输函数去逼近给定的滤波器幅度响应指标，而滤波器的相位响应可以通过级联全通滤波器来校正。
- 一种广泛应用的IIR滤波器设计方法是把一个模拟的原型传输函数转换为一个数字的传输函数，FIR滤波器的设计则是基于对指定幅度响应的直接逼近
- 在设计数字传输函数G(z)之前，有两个关键的问题需要考虑：
- 分析使用数字滤波器的整个系统的需求，确定合理的滤波器频率响应指标。
- 确定所设计的滤波器是FIR还是IIR数字滤波器。

### 4.4 模拟低通滤波器的设计

#### 1. 滤波器特性:

通带  $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_p$  中,  $1 - \delta_p \leq |H_a(j\Omega)| \leq 1 + \delta_p, \text{ for } |\Omega| \leq \Omega_p$

阻带  $\Omega_s \leq |\Omega| < \infty$  中,  $|H_a(j\Omega)| \leq \delta_s, \text{ for } \Omega_s \leq |\Omega| < \infty$

$\Omega_p$ : 通带截止频率

$\Omega_s$ : 阻带截止频率

$\delta_p$ : 通带波纹

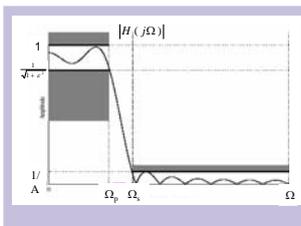
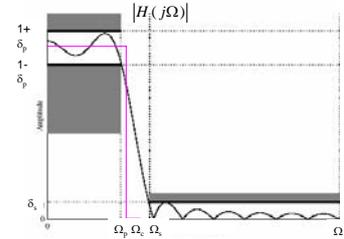
$\delta_s$ : 阻带波纹

$\alpha_p$ : 通带峰值波纹

$$\alpha_p = -20 \log_{10}(1 - \delta_p) \text{ dB}$$

$\alpha_s$ : 最小阻带衰减

$$\alpha_s = -20 \log_{10} \delta_s \text{ dB}$$



过渡比或选择性参数:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$

分辨参数:

$$k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

模拟低通滤波器的归一化幅度指标

4.13  $\alpha_p = -20 \log_{10}(1 - \delta_p)$  dB and  $\alpha_s = -20 \log_{10} \delta_s$  dB. Therefore,

$$\delta_p = 1 - 10^{-\alpha_p/20} \text{ and } \delta_s = 10^{-\alpha_s/20}$$

(a)  $\alpha_p = 0.21$  dB and  $\alpha_s = 52$  dB. Hence,  $\delta_p = 0.0239$  and  $\delta_s = 0.025$ .

#### 4.4.2 巴特沃兹逼近

一个N阶模拟低通Butterworth滤波器的 $H_a(s)$ 的幅度平方响应:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

#### 巴特沃兹滤波器的设计

巴特沃兹滤波器可以由参数 $\Omega_c$ 和N完全确定。可以通过指定通带截止频率、最小通带幅度、阻带截止频率和最大阻带波纹来确定这两个参数。

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2} = (1 - \delta_p)^2 \quad (1)$$

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{A^2} = \delta_s^2 \quad (2)$$

其中,  $\Omega_p$ : 通带截止频率;  $\Omega_s$ : 阻带截止频率。

$$N = \frac{\log_{10}[(A^2 - 1)/\epsilon^2]}{2 \log_{10}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{2 \log_{10}(1/k)} \quad (3)$$

$\Omega_c$  可由  $N'$  和 (1) 或 (2) 确定。

4.22  $10 \log_{10} \left( \frac{1}{1 + \epsilon^2} \right) = -0.25$ . Therefore,  $\epsilon^2 = 10^{0.025} - 1 = 0.0593$ . Next, from  $10 \log_{10} \left( \frac{1}{A^2} \right) = -25$ , we get  $A^2 = 10^{2.5} = 316.2278$ . Now,  $\frac{1}{k} = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{6}{1.5} = 4$  and  $\frac{1}{k_1} = \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{\epsilon^2} = \frac{\sqrt{315.2278}}{0.0593} = 72.9381$ . Hence,  $N = \frac{\log_{10}(1/k_1)}{\log_{10}(1/k)} = 3.0943$ . We choose  $N = 4$  as the filter order.

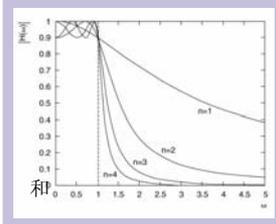
#### 4.4.3 Chebyshev 逼近

##### 1. Chebyshev 1 型逼近

该种滤波器 $H_a(s)$ 的幅度平方响应为:

$$|H^0(z)|^2 = \frac{1 + \epsilon^2 \Lambda_N^2(\zeta) \Lambda_N^2(\zeta^b)}{1}$$

其中: 
$$\Lambda_N^2(\zeta) = \begin{cases} \cos^2 p(\sqrt{1 - \cos^2 p - \zeta^2}) & |\zeta| > 1 \\ \cos^2(\sqrt{1 - \cos^2 p - \zeta^2}) & |\zeta| \leq 1 \end{cases}$$



- 特点: 1、通带内具有等波纹;
- 2、阻带内单调下降

若  $\Omega = \Omega_s$  处, 幅度等于  $1/A$  则:

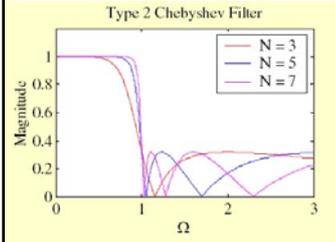
$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{1}{A^2}$$

$$N = \frac{\cosh^{-1}(\sqrt{A^2 - 1}/\epsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\cosh^{-1}(1/k_1)}{\cosh^{-1}(1/k)}$$

## 2. Chebyshev 2 型逼近

该滤波器有：
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[ \frac{T_N(\Omega_s/\Omega_p)}{T_N(\Omega_s/\Omega)} \right]^2}$$

幅度响应



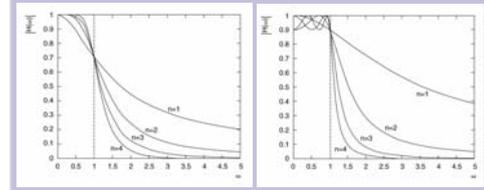
阶数估计：

$$N = \frac{\cosh^{-1}(\sqrt{A^2 - 1/\varepsilon})}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\cosh^{-1}(1/k_1)}{\cosh^{-1}(1/k)}$$

特点：1、通带内单调下降；2、阻带内具有等波纹

## 与巴特沃斯滤波器的主要区别：

1. Butterworth滤波器频率特性，无论在通带与阻带都随频率而单调变化，因此如果在通带边缘满足指标，则在通带内肯定会有富裕量，也就是会超过指标的要求，因而并不经济。
2. 更有效的方法是将指标的精度要求均匀地分布在通带内，或均匀分布在阻带内，或同时均匀分布在通带与阻带内，这时就可设计出阶数较低的滤波器。这种精度均匀分布的办法可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来完成。



## 4.4.4 椭圆逼近

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

其中  $R_N(x)$  是雅可比(Jacobi) 椭圆函数， $\varepsilon$  为与通带衰减有关的参数。

特点：

- 1、椭圆低通滤波器是一种零、极点型滤波器，它在有限频率范围内存在传输零点和极点。
- 2、椭圆低通滤波器的通带和阻带都具有等波纹特性，因此通带，阻带逼近特性良好。
- 3、对于同样的性能要求，它比前两种滤波器所需用的阶数都低，而且它的过渡带比较窄。

阶数估计：
$$N \approx \frac{2 \log_{10}(4/k_1)}{\log_{10}(1/\rho)}$$

$$\rho_0 = \frac{1 - \sqrt{k'}}{2(1 + \sqrt{k'})} \quad k' = \sqrt{1 - k^2} \quad \rho = \rho_0 + 2(\rho_0)^5 + 15(\rho_0)^9 + 150(\rho_0)^{13}$$

## 四种滤波器的比较：

巴特沃斯：通带和阻带均具有平滑幅度

切比雪夫I型：通带内等波纹，阻带平滑

切比雪夫II型：阻带内等波纹，通带平滑

椭圆：通带、阻带内具有等波纹特性

在相同条件下（阶数、波纹等），过渡带宽度：

巴特沃斯 > 切比雪夫 > 椭圆

相位：巴特沃斯、切比雪夫在通带3/4内近似线性相位，椭圆在通带1/2内近似线性相位

## 4.5 模拟高通、带通和带阻滤波器的设计

- 模拟高通、带通、带阻滤波器可以通过简单的频谱由低通原型滤波器得到

● 设计步骤：

- 利用频谱变换，由所需的模拟滤波器性能指标得到模拟低通滤波器的性能指标
- 低通原型滤波器设计
- 用相反的频谱变换将原型低通转换为所需的模拟滤波器

$$H_{LP}(s) \xleftrightarrow[\hat{s}=F^{-1}(s)]{s=F(\hat{s})} H_D(\hat{s})$$

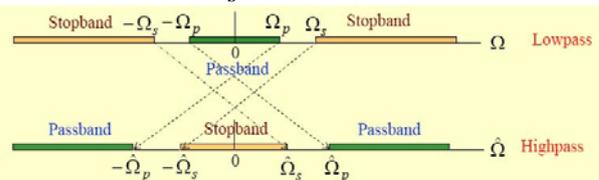
变换：  
s-平面  
↓  
s-hat-平面

$$H_{LP}(s) = H_D(\hat{s})|_{\hat{s}=F(\hat{s})} \quad H_D(\hat{s}) = H_{LP}(s)|_{s=F^{-1}(s)}$$

## 1. 模拟高通滤波器的设计

$$s = \frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{s}} \Rightarrow \Omega = -\frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}}$$

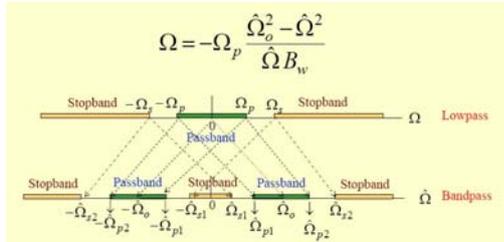
$$H_{hp}(\hat{s}) = H_{lp}(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{s}}}$$



#### 4.5.2 模拟带通滤波器的设计

$$s = \Omega_p \frac{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_0^2}{\hat{s}(\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1})} \Rightarrow \Omega = -\Omega_p \frac{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}{\hat{\Omega}(\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1})}$$

$$H_{bp}(\hat{s}) = H_{lp}(s) \Big|_{s=\Omega_p \frac{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_0^2}{\hat{s}(\hat{\Omega}_{p2} - \hat{\Omega}_{p1})}}$$

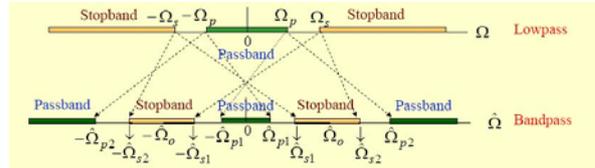


#### 4.5.3 模拟带阻滤波器设计

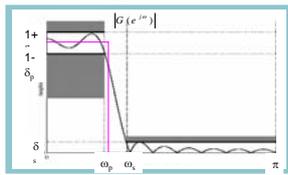
$$s = \Omega_s \frac{\hat{s}(\hat{\Omega}_{s2} - \hat{\Omega}_{s1})}{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_0^2} \Rightarrow \Omega = \Omega_s \frac{\hat{\Omega}(\hat{\Omega}_{s2} - \hat{\Omega}_{s1})}{\hat{\Omega}_0^2 - \hat{\Omega}^2}$$

$$\hat{\Omega}_{p1}\hat{\Omega}_{p2} = \hat{\Omega}_{s1}\hat{\Omega}_{s2} = \hat{\Omega}_0^2$$

$$H_{bs}(\hat{s}) = H_{lp}(s) \Big|_{s=\Omega_s \frac{\hat{s}(\hat{\Omega}_{s2} - \hat{\Omega}_{s1})}{\hat{s}^2 + \hat{\Omega}_0^2}}$$



#### 9.1.1 数字滤波器指标



通带  $0 \leq |\omega| \leq \omega_p$

$$1 - \delta_p \leq |G(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p, \text{ for } |\omega| \leq \omega_p$$

阻带  $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$

$$|G(e^{j\omega})| \leq \delta_s, \text{ for } \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$

$\omega_p$ : 通带截止频率  
 $\omega_s$ : 阻带截止频率  
 $\delta_p$ : 通带波纹  
 $\delta_s$ : 阻带波纹

$\alpha_p$ : 峰值通带波纹  
 $\alpha_p = -20 \log_{10}(1 - \delta_p) \text{ dB}$   
 $\alpha_s$ : 最小阻带衰减  
 $\alpha_s = -20 \log_{10} \delta_s \text{ dB}$

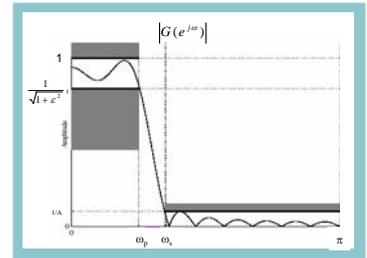
最大通带衰减:  $\alpha_{\max} = 20 \log_{10}(\sqrt{1 + \epsilon^2}) \text{ dB}$

$$\alpha_{\max} \cong -20 \log_{10}(1 - 2\delta_p) \cong 2\alpha_p$$

设  $F_T$  为采样频率 (Hz),  $F_p$  和  $F_s$  分别为通带和阻带截止频率 (Hz), 则归一化截止角频率为:

$$\omega_p = \Omega_p T = \frac{\Omega_p}{F_T} = \frac{2\pi F_p}{F_T} = 2\pi F_p T$$

$$\omega_s = \Omega_s T = \frac{\Omega_s}{F_T} = \frac{2\pi F_s}{F_T} = 2\pi F_s T$$



归一化的数字低通滤波器幅度响应指标

#### 9.1.2 滤波器类型的选择

- FIR 滤波器可以设计为线性相位, 并且总是稳定的。
- 在多数情况下, FIR 滤波器的阶数  $N_{\text{FIR}}$  显著大于具有等效幅度响应的 IIR 滤波器阶数  $N_{\text{IIR}}$ 。  $N_{\text{FIR}}/N_{\text{IIR}}$  通常为 10 的量级或更高。
- IIR 滤波器通常计算更简便。
- 在很多应用中, 并不要求滤波器具有严格的线性相位, 在这些情况下, 通常会因计算简便而选择 IIR 滤波器。

#### 9.2 IIR 滤波器设计的双线性变换法

##### 1. 双线性变换

● 有很多种变换方法可以将一个模拟传输函数  $H_a(s)$  变换成一个数字传输函数  $G(z)$ , 从而使  $z$  域的数字传输函数保留  $s$  域的模拟传输函数的基本性质。

● 在这些变换中, 更多地使用双线性变换法来设计基于模拟原型滤波器变换的 IIR 数字滤波器。

● 从  $s$  平面到  $z$  平面的双线性变换为:

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

● 以上变换是一个一一映射, 它将  $s$  平面上的一点映射为  $z$  平面上的一点, 或将  $z$  平面上的一点映射为  $s$  平面上的一点。数字传输函数  $G(z)$  和原型模拟传输函数  $H_a(s)$  之间的关系为:

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}$$

●双线性变换是通过应用梯形数值积分方法来从 $H_a(s)$ 的微分方程得到 $G(z)$ 的差分方程的一种变换。参数 $T$ 表示数值积分的步长

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \longrightarrow H(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(\tau) d\tau = \int_0^{(n-1)T} x(\tau) d\tau + \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau) d\tau$$

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(\tau) d\tau = \int_0^{(n-1)T} x(\tau) d\tau + T \cdot \frac{x(nT) + x((n-1)T)}{2}$$

$$y[n] = y[n-1] + \frac{T}{2} \{x[n] + x[n-1]\}$$

$$H(z) = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

●双线性变换主要用在:

- 用反双线性变换来将数字滤波器的性能指标转换为模拟原型滤波器的性能指标
- 用双线性变换来从模拟传输函数得到所希望的数字滤波器的传输函数 $G(z)$

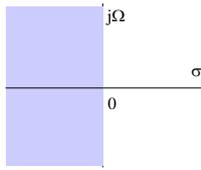
●参数 $T$ 对 $G(z)$ 的表达式没有影响, 可以选择 $T=2$ 来简化设计的过程

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{1+s}{1-s}$$

$$s = j\Omega_0 \Leftrightarrow z = \frac{1+j\Omega_0}{1-j\Omega_0}$$

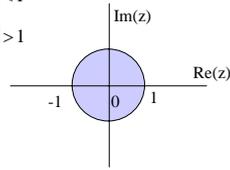
$$s = \delta_0 + j\Omega_0 \Leftrightarrow z = \frac{1+\delta_0 + j\Omega_0}{1-\delta_0 - j\Omega_0} \Leftrightarrow |z| = \frac{(1+\delta_0)^2 + \Omega_0^2}{(1-\delta_0)^2 + \Omega_0^2}$$

$\delta_0 = 0$ (虚轴)  $\Leftrightarrow |z| = 1$ (单位圆)



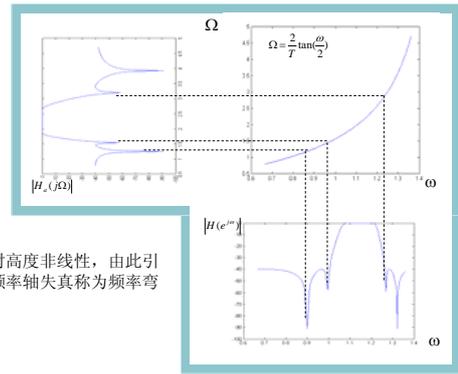
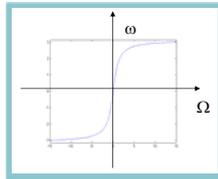
$\delta_0 < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$

$\delta_0 > 0 \Leftrightarrow |z| > 1$



令:  $s = j\Omega, z = e^{j\omega}$

$$j\Omega = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{j\omega}} = j \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \Rightarrow \Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



●映射高度非线性, 由此引起的频率轴失真称为频率弯折

## 2. 低阶数字滤波器的设计

### \* 一阶巴特沃兹低通和高通滤波器

例一阶Butterworth模拟低通滤波器的传输函数:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

用双线性法, 得到低通:

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\Omega_c(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \Omega_c(1+z^{-1})}$$

$$G(z) = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} \quad \text{和} \quad \alpha = \frac{1-\Omega_c}{1+\Omega_c} = \frac{1-\tan(\omega_c/2)}{1+\tan(\omega_c/2)}$$

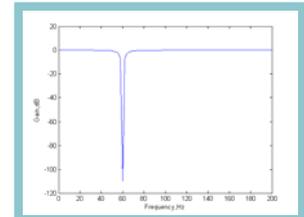
同样, 高通可得:  $G(z) = \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$

### \* 二阶带通和带阻数字滤波器

二阶模拟陷波器的传输函数为

$$H_a(s) = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s^2 + Bs + \Omega_0^2}$$

$$|H_a(j\Omega)| = \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{B^2\Omega^2 + (\Omega_0^2 - \Omega^2)^2}}$$



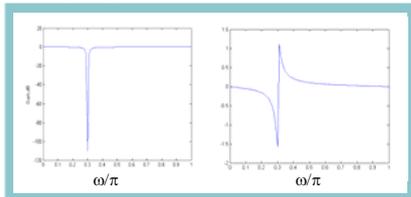
$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{(1+\Omega_0^2) - 2(1-\Omega_0^2)z^{-1} + (1+\Omega_0^2)z^{-2}}{(1+\Omega_0^2+B) - 2(1-\Omega_0^2)z^{-1} + (1+\Omega_0^2-B)z^{-2}}$$

$$\alpha = \frac{1 + \Omega_0^2 - B}{1 + \Omega_0^2 + B} \quad \beta = \frac{1 - \Omega_0^2}{1 + \Omega_0^2}$$

$$G(z) = \frac{1}{2} \frac{(1 + \alpha) - 2\beta(1 + \alpha)z^{-1} + (1 + \alpha)z^{-2}}{1 - \beta(1 + \alpha)z^{-1} + \alpha z^{-2}}$$

• 陷波频率  $\omega_0$  和3-dB陷波带宽  $B_w$  与常数  $\alpha$  和  $\beta$  相关

$$\alpha = \frac{1 - \tan(B_w/2)}{1 + \tan(B_w/2)} \quad \beta = \cos \omega_0$$



**Example** The causal IIR digital transfer function

$$G(z) = \frac{5z^2 + 4z - 1}{8z^2 + 4z}$$

was designed using the bilinear transformation method with  $T = 2$ . Determine the parent analog transfer function.

**Answer:**  $H_a(s) = G(z) \Big|_{z = \frac{1+s}{1-s}} = \frac{5 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^2 + 4 \left( \frac{1+s}{1-s} \right) - 1}{8 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^2 + 4 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)} = \frac{2+3s}{s^2+4s+3}$

**9.13** For the impulse invariance method:  $2\pi F_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0.56\pi}{0.2 \times 10^{-3}} \Rightarrow F_p = 1.4 \text{ kHz}$

For the bilinear transformation method:

$$F_p = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \cdot \frac{1}{\pi T} = \tan\left(\frac{0.56\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\pi(0.2 \times 10^{-3})} = 1.923 \text{ kHz}$$

**9.8**  $H_a(s) = \frac{A}{s + \alpha}$ . The transfer function has a pole at  $s = -\alpha$ . Now

$$G(z) = \text{Residue} \left[ \frac{A}{(s + \alpha)(1 - e^{sT} z^{-1})} \right]_{s = -\alpha} = \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}} = \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

### 9.3 低通IIR数字滤波器

**Example - D** sign a lowpass Butterworth digital filter with  $\omega_p = 0.25\pi$ ,  $\omega_s = 0.55\pi$ ,  $\alpha_p \leq 0.5 \text{ dB}$ , and  $\alpha_s \geq 15 \text{ dB}$

Because:  $\frac{1}{1 + \varepsilon^2} = |G(e^{j\omega_p})|^2$ ,  $\frac{1}{A^2} = |G(e^{j\omega_s})|^2$

Thus

$$\varepsilon^2 = 0.1220185 \quad A^2 = 31.622777$$

If  $|G(e^{j0})| = 1$  this implies

$$20 \log_{10} |G(e^{j0.25\pi})| \geq -0.5$$

$$20 \log_{10} |G(e^{j0.55\pi})| \leq -15$$

$$\Omega_p = \tan(\omega_p/2) = \tan(0.25\pi/2) = 0.4142136$$

$$\Omega_s = \tan(\omega_s/2) = \tan(0.55\pi/2) = 1.1708496$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 2.8266809 \quad \frac{1}{k_1} = \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{\varepsilon} = 15.841979$$

$$N = \frac{\log_{10}(\frac{1}{k_1})}{\log_{10}(\frac{1}{k})} = 2.6586997$$

Choose  $N=3$ , To determine  $\Omega_c$  we use

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$\frac{1}{1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Rightarrow \Omega_c = 0.588148$$

3rd-order lowpass Butterworth transfer function for  $\Omega_c = 1$  is

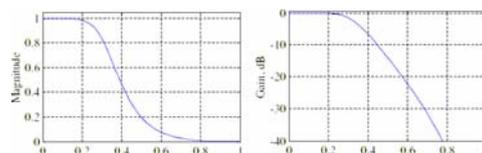
$$H_{an}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{0.588148}\right)$$

Applying bilinear transformation to  $H_a(s)$ , we get the desired digital Transfer function:

$$G(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.0662272(1+z^{-1})^3}{(1-0.2593284z^{-1})(1-0.6762858z^{-1}+0.3917468z^{-2})}$$

Magnitude and gain responses of  $G(z)$  shown below:



**Example** A lowpass IIR digital transfer function is to be designed by transforming a lowpass analog filter with a passband edge  $F_p$  at 0.5 kHz using the impulse invariance method with  $T = 0.5$  ms. What is the normalized passband edge angular frequency  $\omega_p$  of the digital filter if the effect of aliasing is negligible? What is the normalized passband edge angular frequency  $\omega_p$  of the digital filter if it is designed using the bilinear transformation method with  $T = 0.5$  ms?

**Answer:** For the impulse invariance design  $\omega_p = \Omega_p T = 2\pi \times 0.5 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3} = 0.5\pi$ .

For the bilinear transformation method design  $\omega_p = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\Omega_p T}{2} \right) = 2 \tan^{-1} (\pi F_p T) = 2 \tan^{-1} (0.25\pi) = 0.4238447331\pi$ .

## 9.4 高通、带通和带阻IIR数字滤波器设计

- 第一种方法分为以下几个步骤:

**Step 1:** 用式  $\Omega = \tan(\frac{\omega}{2})$  预畸所求数字滤波器GD(z)的数字频率指标, 从而得到一个等价的模拟滤波器HD(s)的频率指标。

**Step 2:** 选取一种合适的频率变换, 将HD(s)的频率指标转换成原型低通滤波器HLP(s)的频率指标。

**Step 3:** 设计模拟低通滤波器HLP(s)。

**Step 4:** 用步骤2中频率变换的逆变换将传输函数HLP(s)转换为HD(s)。

**Step 5:** 对传输函数HD(s)进行如式(9.14)所示的双线性变换, 从而得到所求的数字IIR传输函数GD(z)

- 第二种方法分为以下几个步骤:

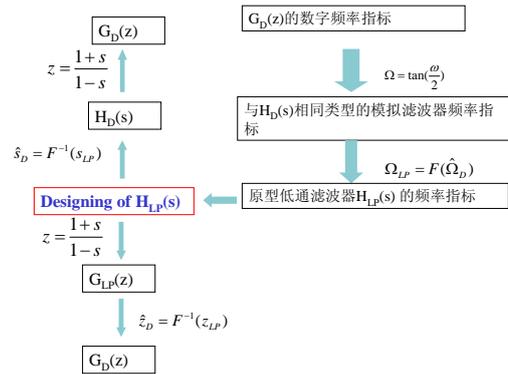
**步骤1:** 用式  $\Omega = \tan(\frac{\omega}{2})$  预畸所求数字滤波器GD(z)的数字频率指标, 从而得到一个等价的模拟滤波器HD(s)的频率指标。

**步骤2:** 选取一种合适的频率变换, 将HD(s)的频率指标转换成原型低通滤波器HLP(s)的频率指标。

**步骤3:** 设计模拟低通滤波器HLP(s)。

**步骤4:** 对传输函数HLP(s)进行双线性变换, 将其转换为IIR数字滤波器的传输函数GLP(s)。

**步骤5:** 选取一种合适的谱变换将GLP(s)转换成所求的数字传输函数GD(z)。



例: 用双线性变换法设计一个离散时间巴特沃兹(Butterworth)低通滤波器, 技术指标为:  $\omega_p = 0.3\pi$ ,  $\omega_s = 0.2\pi$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $A = 10$

解: 1、将数字滤波器的技术指标转换到连续时间域

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) = 0.5095$$

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) = 0.3249$$

2、模拟滤波器的选择因子

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 0.6377 \quad k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = 0.05025$$

$$N = \frac{\log(1/k_1)}{\log(1/k)} = \frac{1.2798}{0.1954} = 6.55$$

取N=7, 可用下两式来确定  $\Omega_c$ 。

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = \epsilon^2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = A^2 - 1 \quad (2)$$

选 (2),  $\Omega_c = 0.3669$ , 所求得的低通巴特沃兹滤波器为

$$H_a(s) = \frac{1}{(s/\Omega_c)^7 + \sum_{i=1}^7 a_i (s/\Omega_c)^{7-i}}$$

3、采用双线性变换  $s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

## 9.5 IIR滤波器的谱变换

- 谱变换可以用来将给定的低通数字IIR传输函数 $G_L(z)$ 转换成另一个低通、高通、带通或带阻滤波器的数字传输函数 $G_D(z)$ 。

$$G_L(z) \xrightarrow{\hat{z} = F^{-1}(z)} G_D(\hat{z})$$

$$z = e^{j\omega} \quad \hat{z} = e^{j\hat{\omega}}$$

- 为了把一个有理的 $G_L(z)$ 变换成一个有理的 $G_D(\hat{z})$ ， $F(\hat{z})$ 必须为 $\hat{z}$ 的一个有理函数
- 另外，为了保证 $G_D(\hat{z})$ 的稳定性，应该将 $z$ 平面单位圆的内部映射到 $\hat{z}$ 平面的单位圆的内部。
- 为了保证将低通幅度响应映射成四种基本类型的幅度响应之一， $z$ 平面单位圆上的点必须映射成 $\hat{z}$ 平面单位圆上的点。

$$|F(\hat{z})| = \begin{cases} > 1 & \text{if } |\hat{z}| > 1 \\ = 1 & \text{if } |\hat{z}| = 1 \\ < 1 & \text{if } |\hat{z}| < 1 \end{cases} \Rightarrow |F^{-1}(\hat{z})| = \begin{cases} < 1 & \text{if } |\hat{z}| > 1 \\ = 1 & \text{if } |\hat{z}| = 1 \\ > 1 & \text{if } |\hat{z}| < 1 \end{cases}$$

$F^{-1}(\hat{z})$  为稳定的全通函数

$$F^{-1}(\hat{z}) = \pm \frac{\hat{z}^{-M} D_M(\hat{z}^{-1})}{D_M(\hat{z})} = \pm \hat{z}^{-M} \prod_{l=1}^M \left( \frac{1 - \alpha_l \hat{z}^{-1}}{1 - \alpha_l \hat{z}} \right) = \pm \prod_{l=1}^M \left( \frac{1 - \alpha_l \hat{z}}{\hat{z} - \alpha_l} \right)$$

$$D_M(z) = \prod_{l=1}^L (1 - \alpha_l z^{-1}) \quad |\alpha_l| \text{ 实数或是以复共轭对的形式出现, 并且 } |\alpha_l| < 1 \text{ 以保持传输函数的稳定}$$

### 1. 低通滤波器到低通滤波器的变换

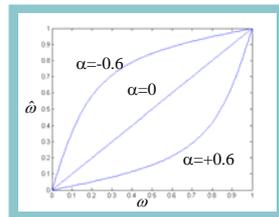
- 要把一个截止频率为 $\omega_c$ 的原型低通滤波器 $G_L(z)$ 变换成另一个截止频率为 $\hat{\omega}_c$ 的低通滤波器 $G_D(\hat{z})$ ，我们会用到变换

$$z^{-1} = F^{-1}(\hat{z}) = \frac{1 - \alpha \hat{z}}{\hat{z} - \alpha}$$

$\alpha$ 为实数

$$e^{-j\omega} = \frac{e^{-j\hat{\omega}} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\hat{\omega}}}$$

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tan\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)$$



$$\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \tan\left(\frac{\hat{\omega}_c}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) - \tan\left(\frac{\hat{\omega}_c}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) + \tan\left(\frac{\hat{\omega}_c}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \hat{\omega}_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \hat{\omega}_c}{2}\right)}$$

- 利用低通滤波器到低通滤波器的变换同样可以把截止频率为 $\omega_c$ 的高通滤波器变换成截止频率为 $\hat{\omega}_c$ 的另一个高通滤波器，把中心频率为 $\omega_0$ 的带通滤波器变换成另一个中心频率为 $\hat{\omega}_0$ 的带通滤波器，以及把中心频率为 $\omega_c$ 的带阻滤波器变换成中心频率为 $\hat{\omega}_0$ 的另一个带阻滤波器。

### 2. 其他变换

变换表

滤波器类型	变换	设计参数
低通滤波器	$z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \hat{\omega}_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \hat{\omega}_c}{2}\right)}$
高通滤波器	$z^{-1} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_c - \hat{\omega}_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c + \hat{\omega}_c}{2}\right)}$
带通滤波器	$z^{-1} = \frac{z^{-1} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}z^{-1} + \frac{\beta-1}{\beta+1}}{\frac{\beta-1}{\beta+1}z^{-1} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{c2} + \omega_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2}\right)}$ $\beta = \cos\left(\frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$ <small><math>\omega_{c2}, \omega_{c1}</math>为预期高、低端截止频率</small>
带阻滤波器	$z^{-1} = \frac{z^{-1} - \frac{2\alpha}{\beta+1}z^{-1} + \frac{1-\beta}{\beta+1}}{\frac{1-\beta}{\beta+1}z^{-1} - \frac{2\alpha}{\beta+1}z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{c2} + \omega_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2}\right)}$ $\beta = \tan\left(\frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$ <small><math>\omega_{c2}, \omega_{c1}</math>为预期高、低端截止频率</small>

- 当低通原型滤波器的带宽与变换后带通滤波器带宽相同，即 $\omega_c = \hat{\omega}_{c2} - \hat{\omega}_{c1}$ 将这个限制条件加到表7.1中的频谱变换，可以得到修正的频谱变换为

$$z^{-1} = -\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$e^{-j\omega} = -\frac{e^{-j\hat{\omega}} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\hat{\omega}}}$$

$$\omega = 0 \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_0 \text{ (带通滤波器的中心频率)}$$

$$\alpha = \cos \hat{\omega}_0$$

作业：  
9.2(a), 9.9(b), 9.10(a), 9.12,  
练习 9.6, 9.15.